

**GEOMETRÍA AFÍN.**

**Punto:** Localización en el espacio de un lugar. El número de dimensiones del espacio fija el número de coordenadas de localización.

**Vector:** Magnitud compuesta de un valor, una dirección y un sentido en esta. Existen vectores libres y vectores fijos.

*Vectores libres:* Vectores cuya dirección, sentido y valor no cambian pero que pueden estar localizados en diferentes lugares del espacio.

*Vectores fijos:* Vectores asociados a un punto del espacio. Este fija donde el vector está.

Las características fundamentales de estos son las siguientes:

1.- Cada vector va desde un punto a otro.

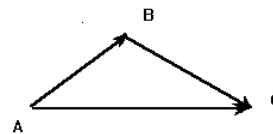
De este modo un vector puede ser nombrado por dos puntos - donde comienza y donde acaba - o por el

vector y el punto que lo localiza en el espacio.  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ . Este vector se construye restando las coordenadas de B y A.

2.- Solo existe un vector que vaya desde un punto a otro.

3.- Dado tres puntos A, B y C, El vector que va desde A hasta C es el mismo que la suma de los vectores A hasta B y B hasta C.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



**ESPACIO AFÍN**

Está formado por los siguientes objetos matemáticos.

1.- Un conjunto de puntos que llamaremos A.

2.- Un conjunto de vectores que formen un espacio vectorial, E.

3.- Unas reglas que lo relacionen, o lo que es lo mismo, una aplicación. Éstas son las ya mencionadas arriba.

La dimensión de los espacios afines son la misma que la de los espacios vectoriales que contienen.

*Sistemas de coordenadas:* Construcción que nos permite mediante un punto y un conjunto de vectores mínimo, localizar cualquier cosa en el espacio en el que estamos trabajando.

Tomaremos como prefijado aquel origen de coordenadas se encuentra en el punto O(0, 0, 0) y cuyos vectores mínimos son  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  ya conocidos o su equivalente  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

**DEFINICIONES:**

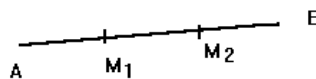
Sean dos puntos A(a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub>) y B(b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub>, b<sub>3</sub>).

**Punto medio de A y B:**

$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$$

Si el segmento que une A y B lo queremos dividir en tres partes podemos hacer lo siguiente:

$$M_1 = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \quad M_2 = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$$



**Baricentro:**

Es el centro de gravedad de un cuerpo geométrico. Este viene determinado como  $\vec{g} = \frac{1}{n}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots + \vec{a}_n)$  donde  $\vec{a}_i$  son las coordenadas de los vértices de la figura geométrica.

**Ecuaciones de rectas y planos:**

Los vectores del tipo (A, B, C) en las ecuaciones siguientes son perpendiculares al plano que determinan.

Los vectores (A, B, C) y (A', B', C') multiplicados vectorialmente nos da el vector de la recta.

$$(A, B, C) \times (A', B', C') = (u_1, u_2, u_3)$$

	Rectas	Planos
<b>Forma vectorial</b>	$\vec{r} = p + t\vec{u}$ $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t(u_1, u_2, u_3)$	$\vec{r} = p + \mu\vec{u} + \lambda\vec{v}$ $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \mu(u_1, u_2, u_3) + \lambda(v_1, v_2, v_3)$
<b>Forma paramétrica</b>	$\begin{cases} x = p_1 + tu_1 \\ y = p_2 + tu_2 \\ z = p_3 + tu_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x = p_1 + \mu u_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \mu u_2 + \lambda v_2 \\ z = p_3 + \mu u_3 + \lambda v_3 \end{cases}$
<b>Ecuación continua:</b>	$\frac{x - p_1}{u_1} = \frac{y - p_2}{u_2} = \frac{z - p_3}{u_3}$	
<b>Ecuación general o implícita.</b>	$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$	$Ax + By + Cz + D = 0$

Para construir las distintas ecuaciones anteriores podemos utilizar las siguientes fórmulas y conceptos:

- El vector (u<sub>x</sub>, u<sub>y</sub>, u<sub>z</sub>) pertenece a la recta y está contenido en ésta.
- Los vectores (u<sub>x</sub>, u<sub>y</sub>, u<sub>z</sub>), (v<sub>x</sub>, v<sub>y</sub>, v<sub>z</sub>), pertenecen al plano, están contenidos en éste.
- Los vectores (A, B, C) y (A', B', C') son perpendiculares a los planos que representan.
- La ecuación general de una recta viene determinada como el corte de dos planos.

Así para hallar la ecuación de una recta se puede partir en general de los siguientes datos:

P, Q

P, u

$$(x, y, z) = (p_x, p_y, p_z) + \lambda (p_x - q_x, p_y - q_y, p_z - q_z) \quad (x, y, z) = (p_x, p_y, p_z) + \lambda (t_x, t_y, t_z)$$

Para hallar la ecuación de un plano se puede partir de los siguientes datos:

P, Q, R (tres puntos cont. en el plano)

P, Q, u (Dos puntos y un vector cont. en el plano)

P, u, v (Un punto y dos vectores cont. en el plano)

P, y n perpendicular al plano

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & p_x & p_y & p_z \\ 1 & q_x & q_y & q_z \\ 1 & r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x - p_x & y - p_y & z - p_z \\ q_x - p_x & q_y - p_y & q_z - p_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x - p_x & y - p_y & z - p_z \\ v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = 0$$

$$Ap_x + Bp_y + Cp_z + K = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

La primera de estas últimas cuatro ecuaciones también se escribe como

$$\begin{vmatrix} x - p_x & y - p_y & z - p_z \\ q_x - p_x & q_y - p_y & q_z - p_z \\ r_x - p_x & r_y - p_y & r_z - p_z \end{vmatrix} = 0$$

Para las siguientes fórmulas, tomaremos como válidas las siguientes definiciones:

Punto: P(p<sub>x</sub>, p<sub>y</sub>, p<sub>z</sub>), R(r<sub>x</sub>, r<sub>y</sub>, r<sub>z</sub>)

Rectas: r: (m<sub>x</sub>, m<sub>y</sub>, m<sub>z</sub>) + λ (u<sub>x</sub>, u<sub>y</sub>, u<sub>z</sub>)  
s: (n<sub>x</sub>, n<sub>y</sub>, n<sub>z</sub>) + λ (v<sub>x</sub>, v<sub>y</sub>, v<sub>z</sub>)

Planos: π: Ax + By + Cz + D = 0

π': A'x + B'y + C'z + D' = 0

**POSICIONES RELATIVAS ENTRE OBJETOS GEOMÉTRICOS**

**Recta y recta.**

Las rectas vienen determinadas por las ecuaciones:

$$\vec{r} = p + \mu\vec{u} \quad \vec{s} = q + \lambda\vec{v} \quad \text{Construiremos el vector } \vec{pq}$$

Estudiaremos con este vector y los de la recta el rango de la matriz que determinan, averiguando con ello la dependencia lineal entre éstos:

$$A = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{pq} \end{pmatrix}$$

	rg (A)	rg (A*)	
<b>Coincidentes:</b>	1	1	
<b>Paralelas:</b>	1	2	
<b>Se cruzan:</b>	2	3	
<b>Secantes:</b>	2	2	

**Posición entre rectas y planos:**

La ecuación de la recta viene dada por  $(a, b, c) = (p_1, p_2, p_3) + t(u_1, u_2, u_3)$  y la del plano:  $Ax + By + Cz + D = 0$

	$(A, B, C) \bullet (u_1, u_2, u_3)$	$Aa + Bb + Cc + D$	
<b>Recta en el plano:</b>	= 0	= 0	
<b>Recta paralela al plano:</b>	= 0	≠ 0	
<b>Recta secante al plano:</b>	≠ 0	≠ 0	

**Posición relativa entre dos planos:**

Los planos vienen dados por las ecuaciones:  $Ax + By + Cz + D = 0$   
 $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

El rango de las matrices a estudiar son los siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix};$$

que denominaremos respectivamente matriz de los coeficientes y matriz ampliada.

	rg (M)	rg (M*)	
<b>Coincidentes</b>	1	1	
<b>Paralelos</b>	1	2	
<b>Secantes</b>	2	2	

**Posición relativa entre tres planos:**

Al igual que en los casos anteriores la manera más rápida es a través del rango.

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

	rg (M)	rg (M*)	
<b>Tres coincidentes</b>	1	1	
<b>Dos coincidentes y otro paralelo</b>	1	2	
<b>Tres paralelos</b>	1	3	
<b>Dos coincidentes y el tercero secante</b>	2 y $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$	2	
<b>Tres secantes y no paralelos</b>	2	2	
<b>Dos paralelos y el tercero secante</b>	2 y $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$	3	
<b>Tres secantes dos a dos</b>	2	3	
<b>Secantes en un punto.</b>	3	3	

Haz de planos:  $Ax + By + Cz + D + k(A'x + B'y + C'z + D') = 0$

Haz de planos paralelos:  $Ax + By + Cz + K = 0$

**GEOMETRÍA AFÍN EUCLIDEA.**

**Definición de espacio euclideo. Producto escalar.**

El espacio vectorial euclideo es un espacio vectorial afín en el se introduce además el producto escalar.

$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \alpha = (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$  donde  $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  denominado módulo del vector.

**Ángulo entre dos vectores:**

Fácilmente se comprueba que si dos vectores son perpendiculares el producto escalar es cero y que el ángulo entre dos

vectores viene dado por la expresión:  $\cos \alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$

**ÁNGULOS ENTRE VARIEDADES LINEALES:**

Ángulo entre dos rectas:	Ángulo entre dos planos:	Ángulo entre recta y plano:
$\cos \alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\ \vec{x}\  \cdot \ \vec{y}\ }$ donde x e y son los vectores de las rectas.	$\cos \alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\ \vec{x}\  \cdot \ \vec{y}\ }$ donde x e y son los vectores normales a los planos.	$\sin \alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\ \vec{x}\  \cdot \ \vec{y}\ }$ donde x e y son los vectores del plano y la recta respectivamente.

**DISTANCIAS:**

Distancia entre dos puntos:	Distancia de un punto a una recta:	Distancia de un punto a un plano:
Mediante la introducción del módulo de un vector podemos aseverar que la distancia entre dos puntos es: $d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$	Se toma el punto genérico de la recta $(q_1 + tu_1, q_2 + tu_2, q_3 + tu_3)$ se construye el vector hasta P $\vec{PP}_r = (q_1 + tu_1 - p_1, q_2 + tu_2 - p_2, q_3 + tu_3 - p_3)$ que se multiplica escalarmente por el vector de la recta $\vec{PP}_r \cdot \vec{u} = 0$ dándonos el valor de t para la proyección ortogonal de P sobre r, $P_r$ .	$d(P, \pi') = \frac{ Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
Distancia entre dos rectas que se cruzan:	Distancia de un recta a un plano:	
$d(r, s) = \frac{ \text{Det}(\vec{pq}, \vec{u}, \vec{v}) }{\ \vec{u} \times \vec{v}\ }$	Se toma un punto arbitrario de la recta y se calcula la distancia de un punto a un plano o bien : $d(r, \pi) = \frac{ Am_x + Bm_y + Cm_z + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$	
Distancia entre dos planos:		
$d(\pi, \pi') = \frac{ D - D' }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$		