Ejercicio nº 1.-

a) Halla los valores de a para los que el conjunto de vectores {(1, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a)} forma una base de R^3.

b) Calcula el volumen del parelelepípedo determinado por los tres vectores anteriores cuando $a = 0$.

Solución:

a) Como son tres vectores de $\mathbf{R}^3$, formarán una base si son linealmente independientes; esto es, si su producto mixto es no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 1 + 1 - a - 1 - a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 1$$

Son base si $a \neq 1$.

b) Calculamos su producto mixto cuando $a = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0-1)^2 = 1^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Volumen} = 1\ \text{u}^3$$

Ejercicio nº 2.-

Halla la ecuación del plano que contiene a estas rectas:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathbf{1} \\ \boldsymbol{z} = \mathbf{2} \end{cases} \qquad \boldsymbol{s}: \begin{cases} \boldsymbol{x} = \mathbf{1} + \lambda \\ \boldsymbol{y} = -\mathbf{2}\lambda \\ \boldsymbol{z} = \mathbf{2} + \lambda \end{cases}$$

Solución:

- Veamos que r y s se cortan en un punto. Para ello, sustituimos las ecuaciones de s en las de r:

$$\left.\begin{aligned} 1 + \lambda - 2\lambda = 1 \quad &\rightarrow \quad \lambda = 0 \\ 2 + \lambda = 2 \quad &\rightarrow \quad \lambda = 0 \end{aligned}\right\} \text{Se cortan en el punto } (1, 0, 2).$$

- Un vector de dirección de r es:

$$\vec{d}_r = (1, 1, 0) \times (0, 0, 1) = (1, -1, 0)$$

• Un vector dirección de s es:

$\vec{d}_s = (1, -2, 1)$

• Un vector normal al plano buscado es:

$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (1, -1, 0) \times (1, -2, 1) = (-1, -1, -1) \,//\, (1, 1, 1)$

• Por tanto, el plano que contiene a r y a s es:

$1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - 2) = 0$, es decir:

$x + y + z - 3 = 0$

Ejercicio nº 3.-

Dados las rectas $r: \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$ y el punto $P(1, 0, -5)$; calcula el ángulo que forma la recta r con el plano, π, perpendicular a s que pasa por P.

Solución:

• Un vector dirección de r es:

$\vec{d}_r = (2, -3, 1) \times (-3, 2, 2) = (-8, -7, -5) \,//\, (8, 7, 5) = \vec{d}$

• Un vector normal al plano π es:

$\vec{n} = \vec{d}_s = (-2, 1, 2)$

• Si llamamos α al ángulo que forman r y π, tenemos que:

$$cos(90° - \alpha) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-16 + 7 + 10}{\sqrt{138} \cdot \sqrt{9}} = \frac{1}{3\sqrt{138}} \approx 0{,}028 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 90° - \alpha = 88° \; 22' \; 26'' \quad \rightarrow \quad \alpha = 1° \; 37' \; 34''$$

Ejercicio nº 4.-

Calcula la distancia entre las rectas:

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{0} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x = -5 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + 4\lambda \end{cases}$$

Solución:

- Buscamos un punto y un vector dirección de cada recta:

$R(-1, 2, -1) \in r; \ \vec{d}_r (3, 4, 0) \ // \ r$

$S(-5, 2, 3) \in s; \ \vec{d}_s (1, -1, 4) \ // \ s$

$\overrightarrow{RS}(-4, 0, 4)$

- La distancia entre las dos rectas es igual al volumen del paralelepípedo definido por $\overrightarrow{RS}, \vec{d}_r, \vec{d}_s$, dividido entre el área del paralelogramo definido por $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$:

$$dist(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{RS}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

$$\left[\overrightarrow{RS}, \vec{d}_r, \vec{d}_s\right] = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -92$$

$$\left|\vec{d}_r \times \vec{d}_s\right| = |(3, 4, 0) \times (1, -1, 4)| = |(16, -12, -7)| = \sqrt{16^2 + (-12)^2 + (-7)^2} = \sqrt{449}$$

Por tanto:

$$dist(r, s) = \frac{92}{\sqrt{449}} \approx 4{,}34$$

Ejercicio nº 5.-

Halla el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano π: $3x - 2y - 4z + 2 = 0$.

Solución:

Obtenemos los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados:

– Con el eje $X \rightarrow y = z = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{3} \rightarrow$ Punto $A\left(-\frac{2}{3}, 0, 0\right)$

– Con el eje $Y \rightarrow x = z = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow$ Punto $B\,(0, 1, 0)$

– Con el eje $Z \rightarrow x = y = 0 \rightarrow z = \frac{1}{2} \rightarrow$ Punto $C\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$

El cuarto vértice del tetraedro es el origen $D\,(0, 0, 0)$.

$\overrightarrow{DA}\left(-\frac{2}{3}, 0, 0\right)$; $\overrightarrow{DB}(0, 1, 0)$; $\overrightarrow{DC}\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$

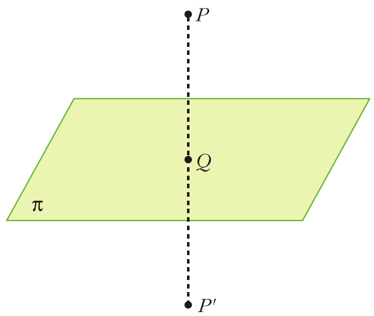
$$\left[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right] = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{3}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}\ \text{u}^3$$

Ejercicio nº 6.-

Obtén el punto simétrico de $P(2, -1, 3)$ respecto al plano π: $3x + 2y + z - 5 = 0$.

Solución:



- Hallamos la ecuación de la recta, r, que pasa por P y es perpendicular a π:

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

- Obtenemos el punto, Q, de intersección de r y π:

$$3(2 + 3\lambda) + 2(-1 + 2\lambda) + (3 + \lambda) - 5 = 0$$

$$6 + 9\lambda - 2 + 4\lambda + 3 + \lambda - 5 = 0 \rightarrow 14\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{7}$$

$$Q\left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right)$$

- Si llamamos P' al simétrico de P respecto de π, Q es el punto medio de PP':

$P'(x, y, z)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{11}{7} \rightarrow x = \dfrac{8}{7} \\ \dfrac{y-1}{2} = -\dfrac{9}{7} \rightarrow y = -\dfrac{11}{7} \\ \dfrac{z+3}{2} = \dfrac{20}{7} \rightarrow z = \dfrac{19}{7} \end{array}\right\} P'\left(\frac{8}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{19}{7}\right)$$

Ejercicio nº 7.-

Obtén el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos
π: $3x - 2y + 4z - 1 = 0$ y σ: $4x + 2y - 3z + 2 = 0$.

¿Qué obtienes?

Solución:

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist(P, \pi) = dist(P, \sigma)$, es decir:

$$\frac{|3x - 2y + 4z - 1|}{\sqrt{29}} = \frac{|4x + 2y - 3z + 2|}{\sqrt{29}}$$

$$|3x - 2y + 4z - 1| = |4x + 2y - 3z + 2| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 4z - 1 = 4x + 2y - 3z + 2 \rightarrow x + 4y - 7z + 3 = 0 \\ 3x - 2y + 4z - 1 = -4x - 2y + 3z - 2 \rightarrow 7x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Obtenemos los planos bisectores de los ángulos diedros formados por π y σ. Los planos obtenidos son perpendiculares entre sí y se cortan en la misma recta que π y σ.

Ejercicio nº 8.-

Halla el valor de k para que la recta $3x + 4y + k = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$.

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro} = \left(\frac{0}{2}, \frac{-4}{2}\right) = (0, -2)$$

$$\text{Radio} = \sqrt{0 + 4 - (-5)} = \sqrt{9} = 3$$

- Calculamos la distancia del centro a la recta dada:

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) + k|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|k - 8|}{5}$$

- La recta es tangente a la circunferencia cuando:

$$\frac{|k - 8|}{5} = 3 \rightarrow |k - 8| = 15 \rightarrow \begin{cases} k - 8 = 15 & \rightarrow \quad k = 23 \\ k - 8 = -15 & \rightarrow \quad k = -7 \end{cases}$$

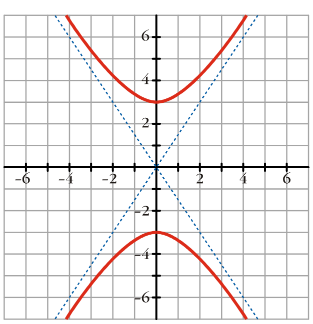
Ejercicio nº 9.-

Identifica la siguiente cónica y represéntala gráficamente:

$$4y^2 - 9x^2 = 36$$

Solución:

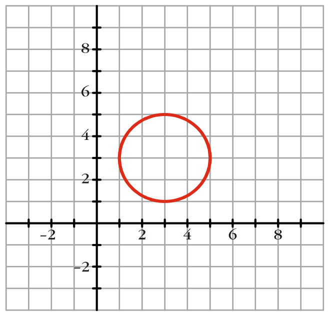
$4y^2 - 9x^2 = 36 \rightarrow \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1.$ Es una hipérbola, cuya gráfica es:



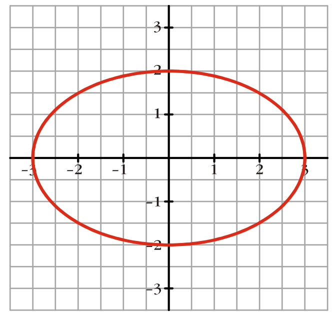
Ejercicio nº 10.-

Escribe las ecuaciones paramétricas de cada una de estas curvas:

a)



b)



Solución:

a) Es una circunferencia de centro $(3, 3)$ y radio 2. Las ecuaciones son:

$$\begin{cases} x = 3 + 2\cos\alpha \\ y = 3 + 2\,sen\,\alpha \end{cases}$$

b) Es una elipse de centro $(0, 0)$ y semiejes 3 y 2. Sus ecuaciones son:

$$\begin{cases} x = 3\cos\alpha \\ y = 2\,sen\,\alpha \end{cases}$$

Ejercicio nº 11.-

Identifica si la siguiente ecuación corresponde a una esfera. En caso afirmativo, halla su centro y su radio:

$$\mathbf{2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 4z - 14 = 0}$$

Solución:

Dividimos entre 2 la ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2z - 7 = 0$$

$$\text{Centro} = \left(\frac{-2}{2}, \frac{0}{2}, \frac{-2}{2}\right) = (-1, 0, -1)$$

$$\text{Radio} = \sqrt{1 + 1 - (-7)} = \sqrt{9} = 3$$

Se trata de una esfera de centro $(-1, 0, -1)$ y radio 3.