Ejercicio nº 1.-

Dada la función $f(x)=x^2 e^{x^2-1}$, escribe la ecuación de su recta tangente en el punto de abscisa $x_0=-1$.

Solución:

- Ordenada en el punto: $f(-1) = 1$

- Pendiente de la recta:

$$f'(x)=2x\cdot e^{x^2-1}+x^2\cdot e^{x^2-1}\cdot 2x=\left(2x+2x^3\right)e^{x^2-1}$$

$$f'(-1)=-4$$

- Ecuación de la recta tangente:

$$y=1-4\,(x+1) \quad \rightarrow \quad y=-4x-3$$

Ejercicio nº 2.-

Estudia el crecimiento y la curvatura de la siguiente función. Halla sus máximos, mínimos y puntos de inflexión:

$$f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{9}-x^2+1$$

Solución:

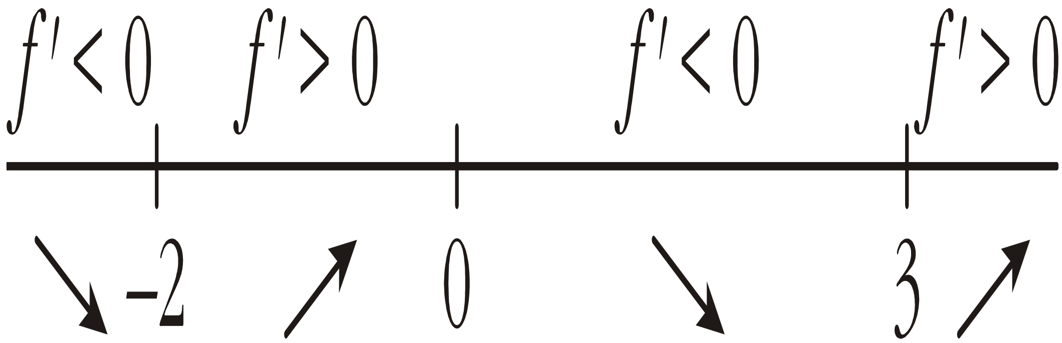
- Derivada:

$$f'(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{3}-2x$$

$$f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^3-x^2-6x}{3}=\frac{x\left(x^2-x-6\right)}{3}=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x^2-x-6=0 \quad \rightarrow \quad x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

• Signo de $f'(x)$:



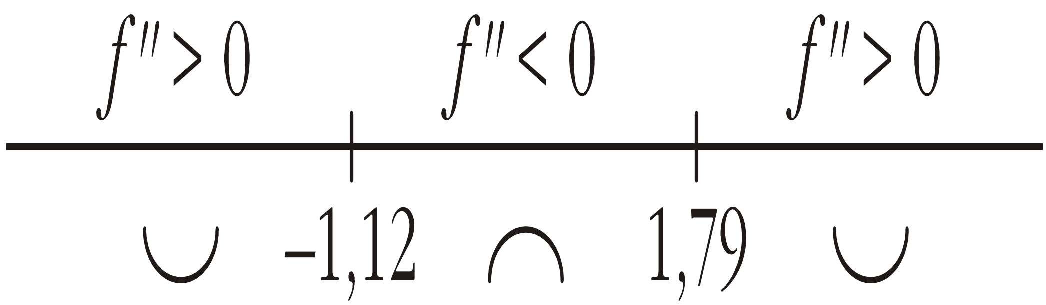
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (0, 3)$; es creciente en $(-2, 0) \cup (3, +\infty)$. Tiene un mínimo en $\left(-2, \dfrac{-7}{9}\right)$ y otro en $\left(3, \dfrac{-17}{4}\right)$. Tiene un máximo en $(0, 1)$.

• Segunda derivada:

$$f''(x) = x^2 - \frac{2x}{3} - 2$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 2x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4+72}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{76}}{6} \begin{cases} x \approx -1{,}12 \\ x \approx 1{,}79 \end{cases}$$

• Signo de $f''(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty; -1{,}12) \cup (1{,}79; +\infty)$; es convexa en $(-1{,}12; 1{,}79)$. Tiene dos puntos de inflexión:

$(-1{,}12; 0{,}03)$ y $(1{,}79, -1{,}99)$

Ejercicio nº 3.-

Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

Solución:

Llamamos x al número de árboles que se plantan. Tenemos que el número de frutos sería:

$$f(x) = (24 + x)(600 - 15x) = -15x^2 + 240x + 14\,400$$

Buscamos x para que $f(x)$ sea máxima:

$$f'(x) = -30x + 240$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -30x + 240 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{240}{30} = 8 \;\rightarrow\; x = 8$$

Veamos que es un máximo:

$f''(x) = -30$; $f''(8) = -30 < 0 \;\rightarrow$ en $x = 8$ hay máximo. (Como $f(x)$ corresponde a una parabola invertida, en $x = 8$ está el máximo absoluto).

Por tanto, se deben plantar 8 árboles. Así, habrá un total de $24 + 8 = 32$ árboles, que producirán 15 360 frutos.

Ejercicio nº 4.-

Halla los siguientes límites:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$ **b)** $\displaystyle \lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$

Solución:

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x \,\mathrm{sen}\, x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\mathrm{sen}(2x)}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos(2x)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2} = (1^{+\infty})$. Tomamos logaritmos:

$$\lim_{x\to 0} \ln(\cos 2x)^{3/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3\ln(\cos 2x)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{3\cdot \frac{-2\,sen\,2x}{\cos 2x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\,tg\;2x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-3(1+tg^2\,2x)\cdot 2}{1} = -6$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

Calcula *m* y *n* para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} mx+1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -2x^2+3x+n & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 3]. ¿Dónde cumple la tesis?

Solución:

- *Continuidad en* [0, 3]:

- Si $x \ne 1$, la función es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 1$, $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(mx+1) = m+1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(-2x^2+3x+n) = 1+n \\ f(1) = m+1 \end{cases}$

Para que sea continua, ha de ser $m+1 = n+1 \;\to\; m = n$

- *Derivabilidad en* (0, 3):

- Si $x \ne 1$, es derivable, y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} m & \text{si} \quad x < 1 \\ -4x+3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

- Para que sea derivable en $x = 1$, han de ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = m \\ f'(1^+) = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \quad m = -1$$

- Por tanto, $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[0, 3]$ si $m = n = -1$. En este caso, quedaría:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -2x^2+3x-1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

- Veamos dónde cumple la tesis:

$$f'(c) = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{-10-1}{3} = \frac{-11}{3}$$

$$\begin{cases} f'(c) = -1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ f'(c) = -4c+3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$-4c+3 = \frac{-11}{3} \quad \rightarrow \quad c = \frac{5}{3} \in (0, 3)$$

Ejercicio nº 6.-

Demuestra que la ecuación:

$$e^x - x - 1 = 0$$

solo tiene la aíz $x = 0$. Para ello, supón que tuviera otra raíz (digamos $x = a$), aplica el teorema de Rolle a la función $f(x) = e^x - x - 1$ en $[0, a]$ (o en $[a, 0]$ si $a < 0$) y llegarás a una contradicción.

Solución:

- Supongamos que tuviera otra raíz positiva, $x = a$.

  - Como $f(x) = e^x - x - 1$ es continua y derivable en **R**, también será continua en $[0, a]$ y derivable en $(0, a)$. Además, sería $f(0) = f(a) = 0$.

  - Por el teorema de Rolle, existiría $c \in (0, a)$ tal que $f'(c) = 0$. Pero:

    $$f'(x) = e^x - 1 = 0 \quad \rightarrow e^x = 1 \quad \rightarrow \quad x = 0 \not\in \ (0, a)$$

    Llegamos a una contradicción, luego no existe ninguna otra raíz positiva.

- Análogamente, si suponemos que existe otra raíz negativa, $x = a$, aplicando el teorema de Rolle con $[a, 0]$, llegaríamos a una contradicción.

- Por tanto, solo tiene la raíz $x = 0$, como queríamos demostrar.