Problema nº1
Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 \text{ si } x\le 0\\ x^2-1 \text{ si } x>0\end{cases}$$

Se pide:

a) Estudia la continuidad de la función en todos los puntos de su dominio.
b) Estudia la derivabilidad de la función en el origen.

Solución

a) El dominio de la función:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 \text{ si } x\le 0\\ x^2-1 \text{ si } x>0\end{cases}$$

es el conjunto R de los números reales.

Se trata de una función a trozos, definida mediante dos polinomios. Por tanto la función es:

Continua para los valores de x < 0 y x >0, por ser las funciones polinómicas que definen a f(x) continuas.

En x = 0, se tiene:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x-1)=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-1)=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\\ f(0)=2\cdot 0-1=-1\end{cases}$$

por tanto f(x) es continua en todo su dominio.

b) Como f(x) es contínua en el origen, puede ser derivable en dicho punto si sus dos derivadas laterales coinciden:

Derivada por la izquierda de x = 0: $f'(0^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{2h-1-(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{2h}{h}=2$

Derivada por la derecha de x = 0: $f'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{h^2-1-(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}(h)=0$

Como las derivadas laterales en el origen son distintas, la función no es derivable en dicho punto.

Problema nº2
De todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas y cortan a la gráfica de la función y = L(x). Halla la que tiene pendiente máxima.

Solución
Como la función:

$$f(x)=L(x)$$

tiene como dominio el conjunto de los números reales.
Observando la figura adjunta, la recta buscada es la tangente a la gráfica que pasa por (0,0)

Sea T(a,f(a)) el punto de tangencia de una tangente cualquiera, su ecuación, es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Siendo:

$$f'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

la ecuación de la tangente es:

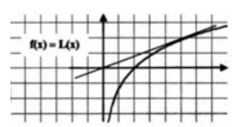
$$y - L(a) = \frac{1}{a}(x - a)$$

Como la tangente pasa por el punto (0,0), se tiene:

$$-L(a) = \frac{-a}{a} \Rightarrow L(a) = 1 \Rightarrow a = e$$

La recta buscada es:

$$y - L(e) = \frac{1}{e}(x - e) \Rightarrow y = \frac{x}{e}$$



Problema nº3

Halla las derivadas de las siguientes funciones:

$$a(x) = \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x^2 - 5}} \qquad b(x) = \frac{1}{2x + 1} - \frac{1}{(2x + 1)^3}$$

Solución

- Poniendo la expresión como un solo radical:

$$a(x) = \sqrt[3]{\frac{(x - 1)^3}{x^2 - 5}}$$

$$a'(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(x^2 - 5)^2}{(x - 1)^6}}D\left(\frac{(x - 1)^3}{x^2 - 5}\right) = \frac{x^2 + 2x - 15}{3(x^2 - 5)\sqrt[3]{x^2 - 5}}$$

- Poniendo la expresión en forma potencial, se tiene:

$$b(x) = (2x + 1)^{-1} - (2x + 1)^{-3}$$

$$b'(x) = -2(2x + 1)^{-2} + 6(2x + 1)^{-4} = -\frac{4(2x^2 + 2x - 1)}{(2x + 1)^4}$$

Problema nº4
Calcula y simplifica la derivada de la función:

$$f(x)=\sqrt{k+x^2}-L\left(\frac{1+\sqrt{k+x^2}}{x}\right)$$

siendo k una constante real.

Solución
Aplicando cálculo logarítmico, se tiene:

$$f(x)=\sqrt{k+x^2}-L\left(\frac{1+\sqrt{k+x^2}}{x}\right)=\sqrt{k+x^2}-L\left(1+\sqrt{k+x^2}\right)+L(x)$$

Derivando, tendremos:

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{k+x^2}}-\frac{\frac{2x}{2\sqrt{k+x^2}}}{1+\sqrt{k+x^2}}+\frac{1}{x}=\frac{x}{\sqrt{k+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{k+x^2}\left(1+\sqrt{k+x^2}\right)}+\frac{1}{x}=\frac{x}{\sqrt{k+x^2}}\left(1-\frac{1}{1+\sqrt{k+x^2}}\right)+\frac{1}{x}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{k+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{k+x^2}}{1+\sqrt{k+x^2}}+\frac{1}{x}=\frac{x}{1+\sqrt{k+x^2}}+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1+\sqrt{k+x^2}}{x\left(1+\sqrt{k+x^2}\right)}$$

Problema nº5
Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$a(x)=\sqrt{k^2-x^2}+k\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{k}\right) \qquad b(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

Solución

$$a(x)=\sqrt{k^2-x^2}+k\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{k}\right)\Rightarrow a'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{k^2-x^2}}+k\cdot\frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{x^2}{k^2}}=-\frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}}+\frac{k^2}{k^2+x^2}$$

$$b(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\Rightarrow b'(x)=\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}=\frac{-2}{(1+x)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}=-\frac{1}{1+x^2}$$

Ejercicio nº6
Halla las tasas de variación instantánea de las siguientes funciones en los puntos x = 3 y x = a:

a) $f(x) = x^3 - x + 2$ b) $g(x) = \frac{1}{x}$

Solución

a) Si la función es:

$f(x) = x^3 - x + 2$

su T.V.I en x = a, es:

$$TVI(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-(a+h)+2-(a^3-a+2)}{h} = 3a^2-1$$

Por tanto, operando de forma análoga, se tiene:

$$TVI(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^3-(3+h)+2-(26)}{h} = 26$$

b) Si la función es:

$g(x) = \frac{1}{x}$

su T.V.I en x = a, es:

$$TVI(a) = \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{ha(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$

Por tanto, operando de forma análoga, se tiene:

$$TVI(3) = \lim_{h\to 0}\frac{g(3+h)-g(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{3+h}-\frac{1}{3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{3h(3+h)} = -\frac{1}{9}$$

Ejercicio nº7
Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola:

$y = x^2 - 5x + 6$

paralela a la recta de ecuación 3x + y - 2 = 0.

Solución
Punto de tangencia T(a,f(a)).
Pendiente de y = -3x + 2: m = -3.
Función derivada: f'(x) = 2x - 5
Derivada en x = a: f'(a) = 2a - 5
Igualando pendientes: 2a - 5 = -3 por tanto a = 1
El punto de tangencia es T(1,2)
Recta tangente: y - 2 = -3(x - 1) de donde 3x + y - 5 = 0.

Ejercicio nº8

Halla las derivadas de las siguientes funciones:

$a(x) = \left(2x^2 + 4x + 6\right)^3 \qquad b(x) = \left(x^3 + 5x^2 - 7x + 1\right)^2 \qquad c(x) = \left(5x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 7\right)^2$

Solución

$a'(x) = (4x + 4) \cdot 3 \cdot \left(2x^2 + 4x + 6\right)^2 = 12 \cdot (x + 1) \cdot \left(2x^2 + 4x + 6\right)^2$

$b'(x) = \left(3x^2 + 10x - 7\right) \cdot 2 \cdot \left(x^3 + 5x^2 - 7x + 1\right) = 2 \cdot \left(3x^2 + 10x - 7\right) \cdot \left(x^3 + 5x^2 - 7x + 1\right)$

$c'(x) = \left(20x^3 - 21x^2 + 12x\right) \cdot 2 \cdot \left(5x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 7\right) = 2 \cdot \left(20x^3 - 21x^2 + 12x\right) \cdot \left(5x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 7\right)$

Ejercicio nº9

Calcula las derivadas de las funciones:

$a(x) = e^{1/x} \qquad b(x) = e^{\frac{x}{x-1}} \qquad c(x) = 2^{\sqrt{x}}$

Solución

$a(x) = e^{1/x} \Rightarrow e^{1/x} \cdot D(1/x) = -\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

$b(x) = e^{\frac{x}{x-1}} \Rightarrow e^{\frac{x}{x-1}} \cdot D\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{x}{x-1}}$

$c(x) = 2^{\sqrt{x}}$ tomando logaritmos neperianos: $L\left(c(x)\right) = \sqrt{x} \cdot L2$

Derivando, se tiene:

$$\frac{c'(x)}{c(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot L2 \Rightarrow c'(x) = \frac{L2}{2\sqrt{x}} \cdot 2^{\sqrt{x}} = \frac{2^{\sqrt{x}-1} \cdot L(2)}{\sqrt{x}}$$

Ejercicio nº10

Halla las derivadas de las siguientes funciones:

$a(x) = \operatorname{sen}^2(x) \qquad b(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} \qquad c(x) = \sqrt[3]{\cos(x)} \qquad d(x) = \cos\left(e^{2x}\right)$

Solución

$a(x) = \operatorname{sen}^2(x) \Rightarrow a'(x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = \operatorname{sen}(2x)$

$b(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = \cos^{-2}(x) \Rightarrow b'(x) = -2\cos^{-3}(x) \cdot \left(-\operatorname{sen}(x)\right) = \dfrac{2\operatorname{sen}(x)}{\cos^3(x)} = 2\operatorname{tg}(x) \cdot \sec^2(x)$

$c(x) = \sqrt[3]{\cos(x)} \Rightarrow \left(\cos(x)\right)^{1/3} \Rightarrow c'(x) = \dfrac{1}{3}\left(\cos(x)\right)^{-2/3} \cdot \left(-\operatorname{sen}(x)\right) = -\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{3\sqrt[3]{\cos^2(x)}}$

$d(x) = \cos\left(e^{2x}\right) \Rightarrow d'(x) = -2e^{2x}\operatorname{sen}\left(e^{2x}\right)$